Topologically Stable Unfoldingについて (C^∞-写像のトポロジー)

AUTHOR(S):

福田, 拓生

数理解析研究所講究録
257巻 1975年 79-100

Topologically stable unfolding について

千葉大 理　福田 拓生

<u>Introduction</u>　Thom の初等カタストロフィー理論は，基本的には，C^∞級関数のC^∞級同相による分類である。所で，このように分類すると，余次元≧6 の関数の類の数は連続濃度となる。(cf, Arnold [1], Siersma [7])。従って，それらの安定関折＝普遍関析のC^∞同値類の数も連続濃度となる。カタストロフィー理論の応用から考えると，現象が観察される空間（いいかえるとコントロール空間）の次元が 6次元以上の場合には，分類したものが多すぎて役に立たない。

一方，C^∞級関数を同相写像で分類することにより，Thom の初等カタストロフィーと同様の議論を組立てることができる。カタストロフィー理論の基本的アイディアが関数の minima のジャンプを分類することであることを考えると，同相写像による分類で充分である。そして，この場合には，上記の欠点（類の数≧∞）が解消されることが，何となく知られている。(Cf. T. Fukuda [2], E. Looyenga [3], J. Mather [4] には

implicit にこのことが含まれている。）しかしこの事実をきちんと述べたものはみあたらず，その証明を与えているものはないようである。

関数の開折を位相型で分類することは，カタストロフィー理論のみでなく，hypersurfaceの特異点，写像の特異点，Analytic spaceの局所論において非常に重要であると思われる。この小論の目的は上の事実の証明の概略を与えることである。証明することは次のことである。

<u>主定理</u>　次元nを任意に固定したとき次元がnのtopologically stable unfoldingをもつ関数の位相型とそれらのn次元のtop. stable unfoldingの位相型は有限個である。

目　次

§1 では 開折(unfolding)の概念を導入する。§2 では，Thomの初等カタストロフィー理論の骨子が述べられる。§3 では位相型による分類においても，同様の骨組ができることを述べる。§4と§5で そのことが証明される。

§1 諸定義 (universal unfolding と stable unfolding)

記号. $C^\infty(M,N) = \{f : M \to N \mid C^\infty$級写像$\}$

$J^k(M,N) =$ MからNへの写像の k-jets のなすC^∞級多様体

$J^k(m,n) = \{z \in J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \mid$ 原点を原点に移す写像の k-jets$\}$

$j^k f : M \to J^k(M,N)$: Mの各点pに対して写像$f : M \to N$の点pにおける k-jet $j^k f(p)$を対応させる写像。

$L^k(n) = \mathbb{R}^n$の原点を fix するC^∞級同相写像の原点における k-jets のなすリー群

$L^k(n)(j^k f(0))$: $j^k f(0) \in J^k(n,1)$とするとき，$L^k(n)$は$J^k(n,1)$にリー変換群として作用するが，その$j^k f(0)$を通る orbit.

$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$: n変数の実係数の多項式のなす環。

$M_n = \{f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid f(0) = 0\}$: 原点に対応する$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$の極大イデアル。

§2

$\mathcal{E}_n$: $\mathbb{R}^n$の原点の近傍で定義されたC^∞級関数の原点における germs のなす環

$\mathfrak{m}_n$: $\mathcal{E}_n$の極大イデアル

$f:(X,p)\to(Y,q)$: 連続写像 $f: X\to Y$ の点 p における germ をあらわす: $f(p)=q$

定義1.1　C^∞級写像 $f_i: M_i\to N_i$, $i=1,2$ が C^∞級(resp. C^0級)右同値であるとは, $N_1=N_2=\mathbb{R}^n$ であって, C^∞級(resp. C^0級)同相写像 $h: M_1\to M_2$ と平行移動 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ が存在して $f_1=T\circ f_2\circ h$ が成立つときにいう。写像芽の右同値についても同様に定義する。

定義1.2　C^∞級写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,a)\to(\mathbb{R},c)$ に対して

$$F(x,b)=f(x)\quad,\ x\in\mathbb{R}^n$$

をみたす C^∞級写像芽 $F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,(a,b))\to(\mathbb{R},c)$ を f の r次元開折(unfolding)という。

注意1.3　$u\in\mathbb{R}^r$ に対して F_u を $F_u(x)=F(x,u)$ で定義する。そのとき, fの開折は $\mathbb{R}^r$ をパラメーターとする変形族(deformation) $\{F_u\}_{u\in\mathbb{R}^r}$ と考えることができる。

<u>定義1.4</u> $F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,(a,b))\dashrightarrow(\mathbb{R},c)$ 及び $G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s,(a',b'))\dashrightarrow(\mathbb{R},c')$ をそれぞれ f 及び g の開折とする。そのとき，組 $\Phi=(H,\varphi,\alpha)$ が次の条件をみたすとき，Φ を G から F への C^∞級 (resp. C^0級) <u>開折圏射</u> (unfolding morphism) という：

(i) $H:(\mathbb{R}^{n+s},(a',b'))\dashrightarrow(\mathbb{R}^n,a)$ は C^∞級 (resp. C^0級) 写像芽で 制限 $H|\mathbb{R}^n\times\{b'\}:(\mathbb{R}^n\times\{b'\},(a',b'))\dashrightarrow(\mathbb{R}^n,a)$ は C^∞級(C^0)同相.

(ii) $\varphi:(\mathbb{R}^s,b')\dashrightarrow(\mathbb{R}^r,b)$ 及び $\alpha:(\mathbb{R}^s,b')\dashrightarrow(\mathbb{R},c-c')$ は C^∞級 (C^0級) 写像芽である。

(iii) 等式 $G(x,v)=F(H(x,v),\varphi(v))+\alpha(v)$, $(x,v)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s$ が成立つ。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \arrow[dr, "F"] & \\
\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s \arrow[u, "H\times\varphi"] \arrow[r, "G-\alpha"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

<u>注意1.5</u> G から F への開折圏射 $\Phi:G\longrightarrow F$ が存在するとする。そのとき，F 及び G を 注意1.3 のように変形族 $\{F_u\}$ 及び $\{G_v\}$ と考えると，上の条件 (iii) は，任意のパラメーター $v\in\mathbb{R}^s$ に対して，G_v と F_u が (C^∞又は C^0) 右同値となるようなパラメーターの間の対応 $u=\varphi(v)$ が存在して，しかも連続性 (C^∞又は C^0) をもつことを意味している。こ

のことは，Gがgの開折としてもつ情報は全てfの開折としてのFの情報の中に含まれていることを示している。

<u>定義1.6</u>　F, G を同じfの開折とする。そのとき，(C^∞又はC^0) 開折圏射 $\Phi=(H,\varphi,\alpha):G\to F$ が (C^∞又はC^0) <u>f-開折圏射</u> であるとは Φがさらに

(iv) $H|\mathbb{R}^n\times\{b'\} = id_{\mathbb{R}^n}$

をみたすときにいう。

定義1.4 より但ちに (C^∞級又はC^0級)開折圏同型の概念をうる。

<u>定義1.7</u>　$F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,(a,b))\dashrightarrow(\mathbb{R},c)$ 及び $G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s,(a',b'))\dashrightarrow(\mathbb{R},c')$ を $f:(\mathbb{R}^n,a)\dashrightarrow(\mathbb{R},c)$ 及び $g:(\mathbb{R}^n,a')\dashrightarrow(\mathbb{R},c')$ の同じ次元 (ie. $r=s$) の開折とする。そのとき，開折圏射 $\Phi=(H,\varphi,\alpha):G\to F$ が (C^∞級又はC^0級) <u>開折圏同型</u> であるとは 開折圏射Φ':$(H',\varphi',\alpha'):F\to G$ が存在して

(v) $\varphi'=\varphi^{-1}$　$(H'\times\varphi')=(H\times\varphi)^{-1}$,　$\alpha'=-\alpha$

をみたすときにいう。　このように開折圏同型が存在するとき，FとGは 開折として (C^∞級orC^0級)同値であるという。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H\times\varphi"] \arrow[dr, shift left, "\mathbb{G}-\alpha"] \arrow[dr, shift right, Rightarrow, "\mathbb{G}"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\mathbb{F}"] \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \arrow[u, "H'\times\varphi'"] \arrow[r, "\mathbb{F}-\alpha'"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

同様にして，f-開折圏同型，fの開折として同値なる概念を得る。注意1.5と定義1.6より次の普遍開折の概念を得る。

<u>定義1.8</u>　fの開折$\mathbb{F}$が　fの（C^∞級 又は C^0級）の<u>普遍開折</u> (differentiably 又は topologically universal unfolding) であるとは，fの他の任意の開折$\mathbb{G}$に対して（C^∞級又はC^0級）の開折圏射 $\Phi : \mathbb{G} \to \mathbb{F}$ が存在するときにいう。

定義1.7より，次の安定開折の概念を得る。

<u>定義1.9</u>　$f:(\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}, c)$ の開折　$\mathbb{F}:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, (a,b)) \to (\mathbb{R}, c)$ が（C^∞級又はC^0級）<u>安定開折</u>（differentiably or topologically stable unfolding）であるとは，点(a,b)の任意の近傍 $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ と$\mathbb{F}$の任意の代表元 $\hat{\mathbb{F}} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ に対して，$\hat{\mathbb{F}}$の$C^\infty(U, \mathbb{R})$ における Whitney topology での近傍 $N(\hat{\mathbb{F}})$ が存在して　次の条件をみたすときにいう：

（条件）任意の写像 $\widetilde{G} \in N(\widetilde{F})$ に対して，点 $(a',b') \in U'$ が存在して $\widetilde{G}$ の (a',b') における写像芽

$$G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, (a',b')) \longrightarrow (\mathbb{R}, \widetilde{G}(a',b'))$$

が r 次元開折として F に（C^∞ 級又は C^0 級）同値になる。

§2 Thom の初等カタストロフィーから。

<u>定義 2.1</u>　C^∞ 関数芽 $f : (\mathbb{R}^n, a) \longrightarrow (\mathbb{R}, b)$ が <u>C^∞-k-determinate</u>（又は <u>C^0-k-determinate</u>）であるとは $j^k f(a) = j^k g(a)$ なる全ての $g : (\mathbb{R}^n, a) \longrightarrow (\mathbb{R}, b)$ に対して常に f と g が（C^∞ 又は C^0）右同値になるときにいう。

<u>補題 2.2</u>　$f \in m_n$ とする。そのとき

$$m_n^k \subset m_n \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}_n} + m_n^{k+1}$$

$$\Longrightarrow f \text{ は } C^\infty\text{-k-determinate}$$

$$\Longrightarrow m_n^{k+1} \subset m_n \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}_n}$$

（証明については J. Mather [10]，G. Wassermann [9]，又は野口－福田 [6] を参照）

この論文で使う C^0-k-determinacy に関して次の定理がある。

補題2.3 (Thom [8]) 任意の正の整数 r 及び n に対して r 及び n のみで定まる自然数 s が存在して次の条件をみたす; (i) $\pi^s_r : J^s(n,1) \longrightarrow J^r(n,1)$ を自然な射影とするとき任意の jet $z \in J^r(n,1)$ に対して, $\pi^{s\,-1}_r(z)$ の中に proper な代数多様体 Σ_z (これを分岐多様体という。) が存在する。

(ii) $j^s f(0) \in \pi^{s\,-1}_r(z) - \Sigma_z$ ならば, f は C^0-s-determinate である。

定義2.4 $F \in m_{n+r}$ を $f \in m_n$ の開折とする。$\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ を F の代表元とする。$u \in \mathbb{R}^r$ に対して $\tilde{F}_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\tilde{F}_u(x) = \tilde{F}(x,u)$ で定義する。$j_1^k \tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を $j_1^k \tilde{F}(x,u) = j^k \tilde{F}_u(x)$ で定義する。$j_1^k \tilde{F}$ を F の自然な k-拡大 (natural k-extension) という。

定義2.5 f の開折 F が C^∞-k-横断的 (C^∞-k-transversal) であるとは F の自然な k-拡大 $j_1^k \tilde{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = J^k(n,1) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ が $j^k f(0)$ を通る $L^k(n)$ の軌道

$$L^k(n)\,(j^k f(0)) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

に横断的なときにいう。

Thom の 初等カタストロフィー の分類において 基本的な役割を果すのは 次の 二つの 定理である。

<u>定理A</u> C^∞-k-determinate な $f \in \mathfrak{m}_n$ の開折 $F \in \mathcal{E}_{n+r}$ について 次の 3条件は同値である：

(i) F は C^∞-universal unfolding

(ii) F は C^∞-stable unfolding

(iii) F は C^∞-k-transversal

<u>定理B</u> $f \in \mathfrak{m}_n$ に対して 次の 3条件は同値である：

(i) ある $k>0$ に対して f は C^∞-k-determinate

(ii) $\operatorname{codim} f \left(\underset{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}_n / \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n \rangle_{\mathcal{E}_n} \right) < +\infty$

(iii) f は C^∞-普遍(又は安定)開折をもつ。

以上の定理A, B は Thom の横断性定理と 次の 補題に基づいている。

<u>補題C</u> $f \in \mathfrak{m}_n$ は C^∞ k-determinate とする。そのとき f の開折で 同じ次元で 共に k-transversal な $F, G \in \mathfrak{m}_{n+r}$ は 開折として C^∞-同値 である。

Thom の初等カタストロフィー において Malgrange の予備定

理が使われるのは　この補題Cにおいて，そしてここでのみである。(この節の議論については，Wassermann [9]，野口-福田 [6] 第7章，を参照。補題C ⇒ 定理A, B　については，本論 §5 を cf.)

§3 Topologically stable unfoldings

Topologically stable unfolding についても前節の定理A, B 及び 補題C に相当する定理が成立つ。さて 安定性の観点からみるとき，C^∞級関数の範疇で考える必要はなく，多項式の範疇で考えれば充分であることを注意して，今後考える関数 及び 開折 は全て多項式で与えられるものとする。

§2 において $L^k(n)$-orbit の果した役割をここでは <u>Canonical</u> stratification が果す。$\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ は §1 の記号で述べた実係数の n 変数の多項式環とし，$P(n,k)=\{f\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n] \mid \deg f \le k\}$ とおく。$P(n,k)$ はある次元のユークリッド空間と同一視できる：$P(n,k)=\mathbb{R}^{N(k)}$。

次に 次の sequence を考える。

$$(*)\quad P(n,k)\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \alpha\ } P(n,k)\times\mathbb{R} \xrightarrow{\ \pi\ } P(n,k)$$

但し，α, π は次式で定義されるものである：

$$\alpha(f,x)=(f,f(x)),\quad \pi(f,y)=f.$$

このとき次の定理を得る。

定理3.1（[2]）$P(n,k)\times\mathbb{R}^n$, $P(n,k)\times\mathbb{R}$ 及び $P(n,k)$ の stratification $\mathcal{S}_1^k$, $\mathcal{S}_2^k$, $\mathcal{S}_3^k$ で次の条件をみたすものが存在する：

(i) α は Thom-map である。

(ii) π は stratified map である。

(iii) $\mathcal{S}_1^k$, $\mathcal{S}_2^k$, $\mathcal{S}_3^k$ の strates は各々 semi-algebraic な submanifold でその数は有限個である。

Thom-map, stratification の概念については [2] 又は [5] を参照のこと。写像の系列 (＊) が条件 (i)(ii) をみたすとき，Thom の 2nd isotopy lemma が使えることを注意しておく。上の定理と 2nd isotopy lemma より次の系を得る。

系3.2 (f,x) と (g,y) が $\mathcal{S}_1^k$ の同じ strate に属すならば，f の x における芽と g の y における芽は C^0-右同値である。従って $P(n,k)$ の元の位相型は有限個しかない。

注意 3.3　1)　$\ell \geq k > 0$ に対して　写像

$$\pi^{\ell}_{k} : P(n,\ell) \longrightarrow P(n,k)$$

を ℓ 次の多項式に対して，それから $k+1$ 次以上の項をとりさってできる k 次の多項式を対応させる写像とする。$P(n,\ell)$，$P(n,k)$ を前述の如く Euclid 空間 $\mathbb{R}^{N(\ell)}$，$\mathbb{R}^{N(k)}$ とみなすと，π^{ℓ}_{k} は $\mathbb{R}^{N(\ell)}$ から $\mathbb{R}^{N(k)}$ への自然な射影となる。同じ記号で自然な射影　$\pi^{\ell}_{k} : P(n,\ell) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow P(n,k) \times \mathbb{R}^n$

をもあらわすものとする。

[2]の方法によると，$f \in P(n,k)$ の $x \in \mathbb{R}^n$ における芽が C^0-k-determinate のとき，(f,x) の $P(n,k) \times \mathbb{R}^n$ における近傍 U が存在して，$(\pi^{\ell}_{k})^{-1}(U)$ の $\mathcal{S}^{\ell}_1$ による stratification は U の $\mathcal{S}^{k}_1$ による stratification に $\mathbb{R}^{N(\ell)-N(k)}$ を直積したものになっている。

2)　$\Sigma_k = \{ (f,x) \in P(n,k) \times \mathbb{R}^n \mid f$ の x における芽が C^0-k-determinate でない。$\}$

とおくと，上の 1) と補題 2.3 を組合わせると，Σ_k は $P(n,k) \times \mathbb{R}^n$ の closed semi-algebraic set となる。

3). E. Looyenga [3] によると 定理 3.1 の条件をみたすもので maximal なもの（すなわち (i)(ii) の性質をもつ他の stratification は全て $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ の細分となっている）が存在する。これを <u>Canonical stratification</u> という。

組 $(f,x)\in P(n,k)\times\mathbb{R}^n$ に対して (f,x) の属する $\mathcal{S}_1^k$ の strata を $\underline{S_k(f,x)}$ であらわす。

<u>定義 3.4</u>　$f\in M_n=\{g\in\mathbb{R}[X_1,\ldots X_n]\mid g(0)=0\}$ の <u>topological codimension</u> を次の様に定義する。

$$\mathrm{top.codim}\, f=\lim_{k\to\infty}\{\mathrm{codim}\, S_k(\pi_k(f),0)\ \mathrm{in}\ P(n,k)\times\mathbb{R}^n\}-n$$

ここで $\pi_k(f)=\pi^l_k(f)$ if $\deg f=l$ である。

注意 3.3 1) より、f が k-determinate ならば、

$$\mathrm{top.codim}\, f=\mathrm{top.codim}\,\pi_k f=\mathrm{codim}\, S_k(\pi_k(f),0)\ \mathrm{in}\ P(n,k)\times\mathbb{R}^n-n$$

となる。

以後 多項式とその芽をあまり区別しないで用いる。

<u>定義 3.5</u>　$F\in\mathbb{R}[X_1,\ldots X_n,u_1,\ldots u_r]$ を $f\in M_n$ の展開とする。次の式で定義される写像 $T^kF:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\longrightarrow P(n,k)\times\mathbb{R}^n$ を F の <u>natural Tayor k-extension</u> という：

$$T^kF(x,u)=(\pi_k(F_u),x)$$

<u>定義 3.6</u>　$f\in M_n$ の展開 $F\in\mathbb{R}[X_1,\ldots X_n,u_1,\ldots u_r]$ が

C^0-k-横断的であるとは，F の natural Taylor k-extension が $S_k(\pi_k f, c)$ に横断的なときにいう。

そのとき，§2 の定理と並行した次の定理を得る。

定理 A′ C^0-k-determinate な top codim $< \infty$ の $f \in M_n$ の展開 $F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_r]$ に対して次の関係が成立つ：

F は C^0-k-transversal (upto f-isomorphic) $\Longleftrightarrow$ F は C^0-stable unfolding (upto f-iso) $\Longrightarrow$ F は C^0-universal unfolding.

注意 C^0 のカテゴリーでは必ずしも stable unfolding と universal unfolding が一致しない。(Cf, §2 定理A)

定理 B′ $f \in M_n$ に対して次の条件は同値である：

(1) ある $k > 0$ に対して f は C^0-k-determinate

(2) top. codim. $f < \infty$

(3) f は C^0-stable unfolding をもつ。

以上の定理の証明は §5 で与えられる。これらの証明は Thom の横断性定理と次の補題 C′ にもとづいている。

<u>補題C'</u>（KEY lemma）　$f, g \in M_n$ を　C^0-k-determinate で　$S_k(\pi_k f, 0) = S_k(\pi_k g, 0)$ とする。そのとき f, g の C^0-k-横断的な　それぞれの r 次元開折　$F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots X_n, u_1, \dots u_r]$ は全て開折として　C^0-同値である。

又ここで使われる　Thom の横断性定理とは　次のタイプの ものである。

<u>補題D'</u>（Thom の横断性定理）

(1)　$f \in M_n$　が top codim $f \leq r$ とする。すると f の任意の r-次元開折は　C^0-k-transversal なものでいくらでも近似できる。

(2)　$S \subset \underline{P}(n, k) \times \mathbb{R}^n$ を submanifold とする。そのとき

$$\{F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots u_r] \mid T^k F \text{ は } S \text{ に transversal}\}$$

は $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, u_1, \dots u_r]$ の中で　稠密である。

§4. Key lemma C' の証明

$f, g \in M_n$　, $F, G \in \mathbb{R}[X_1, \dots X_n, u_1, \dots u_r]$ を Key lemma C' におけるものとする。注意 3.3 2) より，C^0-k-determinate

という性質が open な性質なので、f, g 及び F_u, G_u, $u \in \mathbb{R}^r$ は全て k 次以下の多項式と仮定して一般性を失なわない。

又 lemma C′ は F と G が充分近いときに証明すれば充分である。([9] 又は [6] 附録III 参照)。従って、F と G は充分近いと仮定する。そのとき

$$I = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

$$F_t = (1-t)F + tG \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n, u_1 \dots u_r], \quad t \in I,$$

とおく。ε が充分小で、F と G が充分近いならば、全ての $t \in I$ に対して F_t も k-transversal である。次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times I \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\bar{\alpha}"'] & P(n,k) \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times I \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\bar{\pi}"'] & P(n,k) \times \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{R}^r \times I \arrow[r, "i_3"] & P(n,k)
\end{tikzcd}$$

ここに、右の縦の sequence は §3 の最初に定義した(*)である。他の写像は次の式で定義される。

$$i_1(x,u,t) = ((F_t)_u, x), \quad i_2(y,u,t) = ((F_t)_u, y)$$

$$i_3(u,t) = (F_t)_u$$

$$\bar{\alpha}(x,u,t)=(F_t(x,u),u,t)\quad \bar{\pi}(y,u,t)=(u,t)$$

各 F_t が k-transversal なので，i_1, i_2, i_3 はそれぞれ右側の縦の列の stratification（定理3.1で与えられた。）$\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \mathcal{S}_3^k$ に横断的である。従って上の図式の左側の系列に $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k$ $\mathcal{S}_3^k$ から stratification が induce できて

$$(**)\quad \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times I \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}^r\times I$$

に対しても

(1) $\bar{\alpha}$ は Thom-map

(2) $\bar{\pi}$ は stratified map

となる。更に各 F_t が k-transversal であることを考慮すると $\mathbb{R}^r\times I\to I$ も（I 自身を strata と考えて）stratified map となり 結局

$$(\overset{*}{**})\quad \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times I \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times I \longrightarrow I$$

に Thom の 2nd isotopy lemma が適用できて，F と G は unfolding として同値になる。

<u>key lemma 証明了</u>

§5. 主定理の証明

主定理の証明　定理B′によると $\text{top.codim} f < \infty$ なる f はある $k > 0$ に対して C^0-k-determinate である。定理3.1の考察によると，$\text{Top Orb}(f)_\ell = \{g \in P(n,\ell) \mid g \text{ と } f \text{ は } C^0\text{-右同値}\}$ は任意の $\ell \geq k$ に対して，$P(n,\ell)$ の semi-algebraic set になる。一方明らかに

$$\text{top codim} f \ (\text{def } 3.4) \geqq \text{codim Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n,\ell) - n$$

である。従って補題2.3によると，各整数 q に対してある整数 $k(q)$ が~~存在して~~，定まって

$$\text{top codim} f \leq q \Rightarrow \text{codim of Top Orb}(f)_\ell \text{ in } P(n,\ell) - n \leq q$$
$$\underset{\text{補題}2.3}{\Longrightarrow} f \text{ は } C^0\text{-}k(q)\text{-determinate}$$

となる。従って $\text{top codim} f \leq q$ の多項式とその stable unfolding を分類するには，$P(n,k(q))$ の多項式で $\text{codim} \leq q$ のものとその stable unfolding を分類するとよい。定理A′によるとそのためには $P(n,k(q))$ の多項式で $\text{codim} \leq q$ のものとその C^0-k-transversal unfolding を分類するとよい。Key lemma C′によると $\text{codim} \leq q$ なる $P(n,k(q))$ を分類するとよい。所で定理3.1及び系3.2によるとそれらは有限個である。

主定理証明了

定理B'の証明　(1) ある $k>0$ に対して f は C^0-k-determinate と (2) top codim $f<\infty$ の同値性は 定義と補題2.3より明らか。(1)+(2) ⟹ (3) f は C^0-stable unfoldingをもつ は定理A'より明らか

(3) ⟹ (2) の証明　背理法を使う。top. codim $f=\infty$ とする。F を f の任意の r 次元開析とするとき，F が C^0-安定開析でないことを示す。top codim $f=\infty$ なので，ある k が存在して，

$$\operatorname{codim} S_k(\pi_k f, 0) \text{ in } P(n,k)\times\mathbb{R}^n > n+r$$

となる。補題D'(§3の最後)より，$S_k(\pi_k f, 0)$ に横断的な，(すなわち交わらぬ) $G\in\mathbb{R}[x_1,\cdots x_n,u_1,\cdots u_r]$ で F はいくらでも近似できる。このような G に対しては，$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$ のどんな点 (x,u) における G の芽をとっても F と開析として同値にはならない。従って F は C^0安定開析ではない。

定理A'の証明　C^0-安定開析 ⟺ C^0-k-横断開析(up to f-iso) の証明

(⟹) 補題Dより，F を f の安定開析とすると，F は k-横断的な f の開析 G で近似できる。F は C^0-stable なので G は F と f-同型である。従って F は C^0-k-transversal (up to f-iso) である。

(⟸) F を f の C^0-k-横断開析とする。そのとき，

$N(F) = \{ G \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_r] \mid T^k G$ が $S_k(\pi_k f, 0)$ に横断的に交わる。$\}$

とおくと，$N(F)$ は F の近傍である。$^\forall G \in N(F)$ に対して (x_0, u_0) を $T^k G$ が $S_k(\pi_k f, 0)$ に交わる点とすると，G の (x_0, u_0) における芽は，key lemma C′ により，F と同値な開折である。従って F は C^0-stable unfolding である。

C^0-k-横断開折 $\Longrightarrow$ C^0-普遍開折の証明

F を f の C^0-k-横断開折とする。$G \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n, v_1, \dots v_s]$ を他の任意の f の開折とする。$G^*, F^* \in \mathbb{R}[x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_r, v_1, \dots v_s]$ を

$$G^*(x, u, v) = G(x, v) - f(x) + F(x, u)$$
$$F^*(x, u, v) = F(x, u)$$

とおく。次のことがなりたつ。(証明は trivial)

(イ) f-開折圏射 $\Phi : G \to G^*$ が存在する。

(ロ) F^* と G^* は k-横断的 ($\because$ F is so) なので，f の開折として同値

(ハ) f-開折圏射 $\Psi : F^* \to F$ が存在する。

従って，f-開折圏射 : $G \to F$ が存在し，F は C^0-universal unfolding となる。

以上

文献

[1] V.I.Arnold: Normal formes of functions near degenerate critical points, Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrange singularities, Funct.Annal. and its Appl. vol. 6, No4, 3-25 (1972).

[2] T.Fukuda: Types topologiques des polynômes, to appear in Publ. Math. I.H.E.S.

[3] E.Looyenga: Structural stability of families of C^∞ functions and the canonical stratification of $C^\infty(N)$, mimeographed I.H.E.S.

[4] J.Mather: Stratifications and Mappings, in "Dynamical systems" ed. by M.Peixoto, proceedings of Salvador symposium on dynamicalsystems, Academic Press (1973).

[5] ________: Notes on topological stability, mimeographed , Harvard Univ.

[6] 野口広・福田拓生：初等カタストロフィー，共立全書，1976刊予定

[7] D.Siersma: The singularities of C^∞-functions of right-codim. ≤ 8, Indag. Math. 35. No1, 31-37 (1973)

[8] R.Thom: Local topological properties of differentiable mappings, Colloquim on Differential Analysis, Oxford Univ. Press. (1964)

[9] G.Wassermann: Stability of Unfoldings, Springer Lecture notes in Math, 393, Springer-Verlag, 1974.

[10] J.Mather: Un published notes on Right-Equivalence

訂正とお詫び　最終日午後に話した"関数の位相型は Thom-Boardman Singularities で分類できる"は誤りでした。・どうも貴重な時間をつぶしまして すみませんでした。